

Geometría al alcance de la mano



Taller de Talento Matemático de Navarra

Pamplona, 27 de septiembre 2024

En esta sesión vamos a trabajar con el material **PLOT**. Su nombre procede de las iniciales de las cuatro ciudades que colaboraron en su creación (**P**oitiers, **L**imoges, **O**rléans, **T**ours). Este material está formado por polígonos regulares que nos permiten construir distintos cuerpos geométricos. Aunque, antes de nada...

1. ¿Qué es un polígono regular?

Durante la charla usaremos la palabra «polígono» para referirnos a un «polígono regular» y ser más ágiles hablando. Nuestro primer objetivo va a ser construir poliedros usando las piezas que tenemos. Pero, claro...

2. ¿Qué es un poliedro?

A partir de aquí... ¡Os toca a vosotros y vosotras!

3. Construid todos los poliedros que podáis con los polígonos que os hemos dado. Podéis esbozar un dibujo aproximado del poliedro o poliedros que habéis logrado formar.

Ahora que habéis construido varios poliedros, podéis contar de modo «sencillo» cuántas caras, aristas y vértices tienen. Pero... ¡Ojo! No hace falta contar absolutamente todo. Pensándolo un poco... *Solo hace falta saber el número de caras.*

4. ¿Cuántas aristas tienen los poliedros que habéis construido? Deducid una fórmula para calcularlas utilizando solamente el número de caras.

5. ¿Cuántos vértices tienen los poliedros que habéis construido? Deducid una fórmula para calcularlos utilizando solamente el número de caras.

Con todo lo que ya tenéis, podéis escribir la información en una tabla. Ya de paso, podéis ver qué ocurre si al número de **C**aras le restáis el número de **A**ristas y le sumáis el número de **V**értices. ¿Observáis algo... «raro»?

6. Rellenad la siguiente tabla con la información necesaria sobre los poliedros:

Poliedro	Caras	Aristas	Vértices	$C - A + V$

En los poliedros que hemos construido, al desplegar las caras que concurren en un vértice, podemos calcular la amplitud del ángulo que falta para dar una vuelta completa. Si multiplicamos este ángulo por el número de vértices del poliedro, obtenemos la medida del **defecto total**. ¿Observáis alguna pauta que se repita?

7. Rellenad la siguiente tabla con la información necesaria sobre los ángulos:

Poliedro	Ángulo	Vértices	Defecto total

Vamos a centrarnos ahora en los poliedros que pueden construirse usando solamente triángulos equiláteros. A estos poliedros se les llama **deltaedros**, por la letra griega «delta», (en griego Δ , nuestra «D», que se parece a un triángulo). ¡A ver cuántos deltaedros distintos podéis encontrar!

8. Rellenad la tabla de deltaedros con todos los que encontréis:

Deltaedro	Caras	Aristas	Vértices (según nº de caras)			Total V
			3 Caras	4 Caras	5 Caras	
Tetraedro	4	6	4	0	0	4
Octaedro	8	12	0	6	0	6
Icosaedro	20	30	0	0	12	12

9. ¿Puede haber un deltaedro con un número impar de caras? Si la respuesta es afirmativa, dad un ejemplo. Si la respuesta es que no, razonad por qué no es posible.

10. ¿Puede haber un deltaedro con 18 caras?

Al comparar el icosaedro y uno de los deltaedros que hemos encontrado (el «platillo volante»), vemos que podemos cortar del icosaedro dos pirámides pentagonales, de forma que nos queda una figura formada por 2 pentágonos y 10 triángulos. A este tipo de poliedros se les llama **antiprismas**.

11. Rellenad la tabla de antiprismas (con las manos y con la cabeza):

Antiprisma	Caras		Total C	Aristas	Vértices	C – A + V
	Distintas	Triángulos				
Antiprisma 5	2 de 5	10	12	20	10	
Antiprisma 6						
Antiprisma 8						
Antiprisma 10						
Antiprisma n						

Observamos que, en los antiprismas, los polígonos que forman las bases están girados el uno respecto del otro. Si colocamos las bases de forma que sean exactamente paralelas y las unimos mediante cuadrados, obtenemos un **prisma**.

12. Rellenad la tabla de prismas (con las manos y con la cabeza):

Prisma	Caras		Total C	Aristas	Vértices	C – A + V
	Distintas	Cuadrados				
Prisma 5	2 de 5	5	7	15	10	
Prisma 6						
Prisma 8						
Prisma 10						
Prisma n						

A lo largo de toda la sesión nos hemos encontrado con una pauta sorprendente que se ha repetido con todos los poliedros que hemos ido construyendo. ¿Cuál es esa pauta?

$$C - A + V = \text{---}$$

A esta relación, que se cumple para todos los poliedros sin «agujeros», se la conoce como **fórmula de Euler**^{*}, y es uno de los resultados más bellos de las matemáticas. Aunque todavía no sepamos las suficientes matemáticas como para demostrar esta fórmula en general, hemos podido comprobar que es cierta para todos los poliedros regulares, los deltaedros convexos, los antiprismas y los prismas.

**¡Nos vemos en la siguiente sesión del
Taller de Talento Matemático de Navarra!**



^{*}No es muy buen nombre, ya que Euler demostró *muchísimas* fórmulas.